«Утверждаю»
Президент ISMA
Проф. Дьякон Р.И.
11 марта 2006 года

Олимпиада по математике 2006.

1. **В прямоугольном треугольнике АВС на катете АС как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу АВ в точке Е. Через точку Е к окружности проведена касательная, которая пересекает катет СВ в точке D. Доказать, что треугольник ВDЕ – равнобедренный.**
2. **Уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + px + q = 0$ имеют общий корень. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются другие корни этих уравнений.**
3. **Дан угол 27^0. Построить угол 9^0.**
4. **Пусть p и q - простые числа, причем $q^3 - 1$ делится на p, а $p - 1$ делится на q. Доказать, что $p = 1 + q + q^2$.**
5. **Доказать, что при любом целом n число $n(n - 3)(n^2 - 3n + 14)$ делится на 24.**
6. **Какое из чисел больше: $\dfrac{23^{2004}+1}{23^{2005}+1}$ или $\dfrac{23^{2005}+1}{23^{2006}+1}$?**
7. **Разложить на множители**

$$2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2.$$

Председатель комиссии по проведению олимпиад
Доктор математики, проф. ISMA
Кованцов А.Н.

APSTIPRINU
ISMAS prezidents
Prof. Djakons R.

Matemātikas olimpiāde 2006.

1. **Taisnleņķa trīsstūrī ABC uz katetes AC kā uz diametra novilka riņķa līniju, kura šķeļ hipotenūzu AB punktā E. Caur punktu E riņķa līnijai novilka pieskari, kura krusto kateti CD punktā D. Pierādīt, ka trīsstūris BDE ir vienādsānu trīsstūris.**
2. **Vienādojumiem** $x^2 + ax + b = 0$ **un** $x^2 + px + q = 0$ **ir viena kopīga sakne. Uzrakstīt vienādojumu, kuram ir dotajos vienādojumos citas saknes.**
3. **Dts leņķis** 27^0 **. Konstruēt leņķi** 9^0**.**
4. **Lai** p **un** q **-vienkārši skaitļi, kur** $q^3 - 1$ **dalās ar** p**, bet** $p - 1$ **dalās ar** q**. Pierādīt, ka** $p = 1 + q + q^2$**.**
5. **Pierādīt, ka katram veselam skaitlim** n **skaitlis** $n(n - 3)(n^2 - 3n + 14)$ **dalās ar 24.**
6. **Kāds skaitlis ir lielāks:**

$$\frac{23^{2004} + 1}{23^{2005} + 1} \quad \textbf{vai} \quad \frac{23^{2005} + 1}{23^{2006} + 1} \ \textbf{?}$$

7. **Izvirzīt reizinājumā**

$$2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2.$$

Olimpiāžu komisijas priekšsēdētājs
Matemātikas zinātņu doktors
ISMAs prof. A. Kovancovs.

Решение олимпиадных задач

1. Достаточно доказать, что $\prec DBE = \prec BED$. Т.к. $\prec CEA = 90^0$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр, то $\prec DBE = 90^0 - \prec BCE$, $\prec BED = 90^0 - \prec DEC$. Треугольник CDE - равнобедренный, поэтому $\prec BCE = \prec DEC$. Значит, $\prec DBE = \prec BED$, т.е. треугольник BDE - равнобедренный.

2. Допустим сначала, что $p \neq a$. Пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения, x_1, x_3 - корни второго уравнения. Тогда $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 + b$, $x_1 + x_3 = -p$, $x_1 x_3 = q$. Т.к. x_1 - общий корень данных уравнений, то $x_1^2 + ax_1 + b = 0$, $x^2{}_1 + px_1 + q = 0$. Из двух этих равенств $x_1 = \frac{b-q}{p-a}\cdot$ Из первых четырех записанных нами равенств имеем

$$x_2 + x^3 = -(a+p) - 2x_1 = -(a+p) - \frac{2(b-q)}{p-a}; \quad x_1^2 x_2 x_3 = bq.$$

Если $b \neq q$, то $x_1 \neq 0$, и тогда

$$x_2 x_3 = \frac{bq}{x^2{}_1} = \frac{(p-a)^2 bq}{(b-q)^2}.$$

Итак, если $p \neq a$, $b \neq q$, то квадратное уравнение, которому удовлетворяют x_1, x_3, имеет вид

$$x^2 + (a + p + \frac{2(b-q)}{p-a})x + (\frac{p-a}{b-q})^2 bq = 0.$$

Если $b = q$, то $x_1 = 0$. Поэтому $b = 0, q = 0.$ Уравнения становятся $x^2 + ax = 0$, $x^2 + px = 0$. Отсюда $x_2 = -a$, $x_3 = -p.$ Этим корням удовлетворяет уравнение

$$x^2 + (a+p)x + ap = 0.$$

Если $p = a$ и уравнения имеют общий корень, то $q = b$, т.е имеем только одно квадратное уравнение ($x_2 = x_3$. Искомое уравнение имеет вид $(x - x_2)^2 = 0$).

3. Отложив 27 раз подряд угол 27^0, получим угол 729^0. Отняв два полных оборота (720^0), получим угол 9^0.

4. Как известно, простым числом называется число, не равное единице и делящееся только на само себя и на единицу. Поскольку p, q - простые числа, а , значит, $p \neq 1$, $q \neq 1$, то из условия, что $p-1$ делится на q следует, что $p = lq + 1$, где $l \geq 1$- целое число. По условию задачи $q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$ делится на p. Поскольку число p - простое, то хотя бы один из сомножителей $q-1$ или q^2+q+1 должен делиться на p. Первый из сомножителей, т.е. $q-1$, не может делиться на p, ибо в противном случае число q было бы больше, чем $p+1$($q > p+1$), а это противоречит нашему p.Значит, на p делится q^2+q+1, поэтому $q^2+q+1 = mp$, где m - натуральное число. Последнее равенство пекрепишем так: $q^2 + q - m(p-1) = m-1$. Сумма в левой части этого равенства делится на q, потому что на q делится каждый из ее слагаемых. Значит, на q должна делиться и правая часть, т.е. $m-1$. Тогда $m = kq+1$, где $k \geq 0$ - целое число. Объединяя полученные равенства и приводя подобные, получаем

$$(kl-1)q^2 + (l+k-1)q = 0.$$

Из этого равенства легко получить, что $k=0$.Тогда $m=1$, а тогда $p = q^2+q+1$, что и требовалось доказать.

5. Обозначив $T_n = n(n-3)[n(n-3)+14)]$, замечаем, что $T_{n+1} = T_n + 24(n-1) + 4(n-2)(n-1)n.$ Т.к. $n(n-1)(n-2)$ делится на три и на два, то умноженные на 4, они делятся на 24,ч.т.д.

6. Пусть $23^{2004} = n$. Тогда надо сравнить числа $\frac{n+1}{23n+1}$ и $\frac{23n+1}{23^2n+1}$.

Легко убедиться, что первое из чисел больше второго.

7.Обозначим $x^2+6x+1=u,\quad x^2+1=v$. Тогда заданное выражение перепишется так $2u^2+5uv+2v^2=2u^2+4uv+uv+2v^2=(u+2v)(2u+v)$. Подставляя вместо $u,\ v$ их выражения, получаем

$$(3x^2+6x+3)(3x^2+12x+3)=9(x+1)^2(x^2+4x+1)=$$

$$=9(x+1)^2(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})\,.$$